მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 180

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

$f: R \to R$

$f(x+yf(x)) = f(f(x)) + xf(y)$

$x=0$

$f(yf(0)) = f(f(0))$ თუ $f(0)\neq 0$ მაშინ $yf(0)$-ს ნებისმიერი მნიშვნელობა შეუძლია მიიღოს და თუ $f(f(0)) \equiv c$ მაშინ გამოვა რომ $f(x)=c$. ჩავსვათ განტოლებაში $c=c+cx$ $cx=0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow c=0$ ანუ $f(x)=0$ ერთერთი ამონახსნია

განვიხილოთ შემთხვევა $f(0)=0$ მაშინ

$y=0$

$f(x) = f(f(x)) + xf(0) \Rightarrow f(x) = f(f(x))$

ანუ აღნიშნული ფუნქცია მნიშვნელობის ჩასმისას უცვლელია

$f(x+yf(x)) = f(x) + xf(y)$

$y = f(y)$

$f(x+f(y)\cdot f(x)) = f(x) + xf(y)$

მარჯვენა მხარეები ტოლია ანუ სრულდება $f(x+yf(x)) = f(x+f(y)\cdot f(x))$

ვთქვათ რომ $a\neq 0$-სთვის $f(a)=0$ მაშინ ჩავსვათ $x=a$

$f(a+yf(a)) = f(a) + af(y)$ $f(a) = af(y)$ $af(y)=0$

$a\neq 0 \Rightarrow f(y)=0$ ანუ ვიღებთ ისევ მუდმივ ნულოვან რომელიც შემთხვევაც განხილული გვაქვს ანუ მხოლოდ $f(0)=0$.

$f(x+yf(x)) = f(x) + xf(y)$

$f(x+f(y)f(x)) = f(x) + xf(y)$

$x = -\frac{f(x)}{f(y)}$ მაშინ მივიღებთ [illegible] 0

([illegible])

ანუ $\forall$ $x+yf(x) = x+f(y)\cdot f(x) = 0$. $\boxed{f(x)\neq 0}$ ანუ x ყველა ნებისმიერი $\neq 0$

$x+yf(x) = x+f(y)\cdot f(x)$ $yf(x) = f(y)f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(y)=y$ ანუ ამონახსნები $f(x)=0$

$f(x)=x$. $\forall x\in R$

შევამოწმოთ და აკმაყოფილებს.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

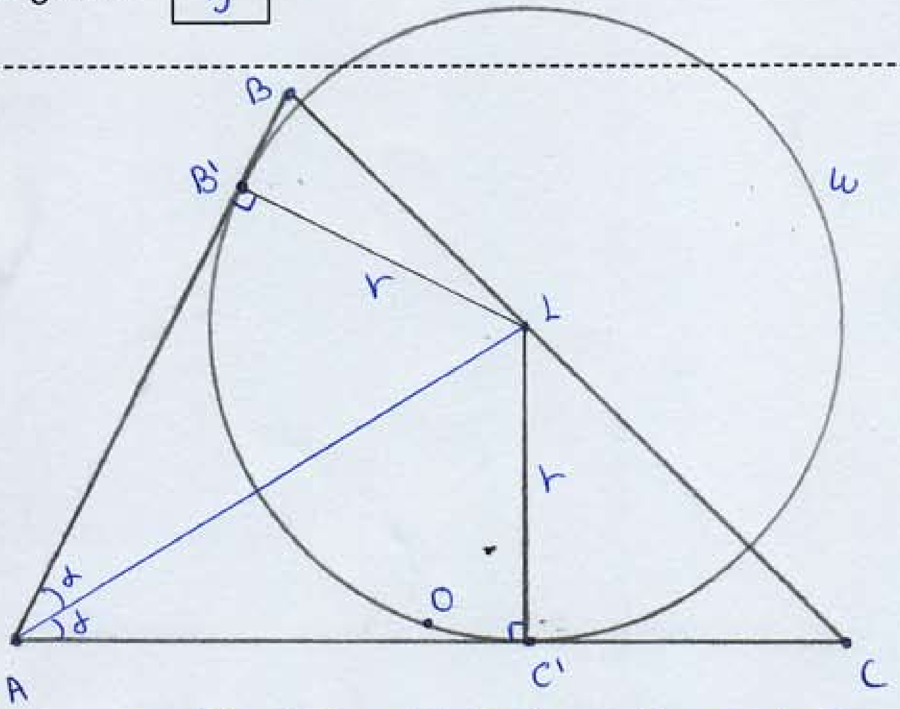
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 180

ამოცანა № 5

გვერდი № 1.



AL არის ბისექტრისა იმიტომ რომ L-იდან კუთხის გვერდებამდე მანძილები ტოლია. უ.დ. ω_{ABC} და ω 2 წერტილში კვეთენ ერთმანეთს ანუ უ.დ. რომ $R_{\omega_{ABC}} < d_\omega$ $\quad R_{\omega_{ABC}} = \frac{BC}{2\sin 2\alpha}$.

$d_\omega = 2r \qquad r = AL\sin\alpha \qquad \sin\alpha = \frac{r}{AL} \qquad \cos\alpha = \frac{AC'}{AL}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\frac{r\cdot AC'}{AL^2} \qquad R_{\omega_{ABC}} = \frac{BC\cdot AL^2}{2r\cdot AC'}$

$d_\omega = 2r \qquad \frac{BC\cdot AL^2}{2r\cdot AC'} < 2r \qquad BC\cdot AL^2 < 4r^2\cdot AC'$

ახლა გამოვიყენოთ ის ფაქტი რომ $O \in \omega$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 180

ამოცანა № 6

გვერდი № 1.

$a+b+c=1$ ვ.დ. $\sum \frac{1}{a^2-2a+5}$ -ის მინიმალური მნიშვნელობა.

$$\sum \frac{1}{a^2-2a+5} = \sum \frac{1}{(a-1)^2+4} = \sum \frac{1}{(b+c)^2+4} = \sum \frac{1}{(a+b)^2+4} \geq$$

$$\geq \sum \frac{1}{2(a^2+b^2+2)} = \sum \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+2)} = \frac{1}{2} \sum \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+2}.$$

$a=b=c=\frac{1}{3}$ -სთვის ეს გამოსახულების მნიშვნელობა

$$\frac{3}{\frac{4}{9}+4} = \frac{3}{\frac{40}{9}} = \frac{27}{40}.$$ ალბათ ესაა მინიმალური.